

равенство (3) и первое равенство (4), а также третье равенство (3) и третье равенство (4) дают условия б). Преобразование второго, четвертого, пятого и шестого из равенств (4) также приводит к условиям б).

Теорема 1. Пусть функция a_3 обращается в нуль в изолированных точках, в которых функции $(a_0 + \bar{a}_0)/a_3$, $(a_1 + \bar{a}_1)/a_3$, $(a_2 + \bar{a}_2)/a_3$ доопределены до непрерывной дифференцируемости и для коэффициентов системы (1) выполняются условия леммы 2. Тогда отражающая функция этой системы имеет вид (2), где $m_0 = (a_0 + \bar{a}_0)/a_3$, $m_1 = (a_1 + \bar{a}_1)/a_3$, $m_2 = (a_2 + \bar{a}_2)/a_3$.

Доказательство очевидно.

Знание отражающей функции 2ω -периодической дифференциальной системы, как известно [1, 2], позволяет определять начальные данные периодических решений. Эти данные определяются решениями алгебраической системы

$$F(-\omega, x) = x. \quad (5)$$

Справедлива

Теорема 2. Пусть для 2ω -периодической системы (1) выполнены условия теоремы 1. Тогда эта система либо не имеет периодических решений, либо таких решений бесконечно много, но не все, либо все решения системы периодические.

Доказательство. Система алгебраических уравнений (5) в нашем случае принимает вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y + m_0(\omega) + m_1(\omega)x + m_2(\omega)x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (6)$$

откуда следует, что первое уравнение системы является тождеством. Следовательно, решения системы (6) определяются решениями квадратного уравнения

$$(a_2(\omega) + \bar{a}_2(\omega))x^2 + (a_1(\omega) + \bar{a}_1(\omega) - a_3(\omega))x + (a_0(\omega) + \bar{a}_0(\omega)) = 0. \quad (7)$$

Если уравнение (7) не имеет решений, то система (1) не имеет периодических решений. Пусть уравнение (7) имеет одно x_1 решение, или два x_1 , x_2 решения. Тогда все решения дифференциальной системы (1), начинающиеся на прямых $t = -\omega$, $x = x_1$ или $t = -\omega$, $x = x_1$ и $t = -\omega$, $x = x_2$ 2ω -периодические. Если же все коэффициенты уравнения (7) есть нули, то все решения 2ω -периодической системы (1) являются периодическими.

Литература

1. Мироненко В.И. *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений*. Мн.: Изд-во «Университетское», 1981. 76 с.
2. Мироненко В.И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. 196 с.

ФУНКЦИЯ ДЮЛАКА — ЧЕРКАСА ДЛЯ СТРУКТУРНО НЕУСТОЙЧИВОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ НА ЦИЛИНДРЕ

А.А. Гринь, С.В. Рудевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
grin@grsu.by, serhiorv@gmail.com

Рассмотрим на цилиндре $Z = \{(\varphi, y) : \varphi \in [0, 2\pi], y \in \mathbb{R}\}$ автономную систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = h_0(\varphi, \mu) + h_1(\varphi, \mu)y + h_2(\varphi, \mu)y^2 + h_3(\varphi, \mu)y^3, \quad (1)$$

зависящую от вещественного параметра $\mu \in J \subseteq \mathbb{R}$, где функции $h_i(\varphi, \mu) : [0, 2\pi] \times J \rightarrow \mathbb{R}$ являются непрерывными по обоим переменным и 2π -периодическими по первой переменной.

В работах [1, 2] был предложен новый подход к признаку Дюлака для нелокальной оценки числа и локализации предельных циклов, охватывающих цилиндр (циклы второго рода), который основан на понятии функции Дюлака — Черкаса в некоторой области $D \subseteq Z$.

Определение 1. Функция $\Psi : D \times J \rightarrow \mathbb{R}$ называется функцией Дюлака — Черкаса системы (1) в области D для $\mu \in J$, если выполняются условия:

- (i) $\Psi(\varphi, y, \mu) = \Psi(\varphi + 2\pi, y, \mu) \quad \forall (\varphi, y, \mu) \in D \times J$;
- (ii) множество $W_\mu = \{(\varphi, y) \in D : \Psi(\varphi, y, \mu) = 0\}$ имеет нулевую меру;
- (iii) существует действительное число $k \neq 0$ такое, что $\forall (\varphi, y, \mu) \in D \times J$, выполняется неравенство

$$\Phi(\varphi, y, \mu, k) := (\text{grad } \Psi, f) + k\Psi \text{div } f \geq 0 \quad (\leq 0),$$

где f — векторное поле системы (1), а множество $V_{\mu, k} := \{(\varphi, y) \in D : \Phi(\varphi, y, \mu, k) = 0\}$ имеет нулевую меру.

Из определения следует, что кривые, принадлежащие множеству W_μ , трансверсально пересекаются траекториями системы (1), но не могут пересекаться предельными циклами. Этот факт удобно применять для оценки числа предельных циклов второго рода в области D , границы которой состоят из двух замкнутых кривых: верхней Δ_u и нижней Δ_l , охватывающих цилиндр и не имеющих общих точек.

Не теряя общности предположим, что множество W_μ состоит в D из s замкнутых кривых (овалов) $W_{\mu,1}, W_{\mu,2}, \dots, W_{\mu,s}$, окружающих цилиндр Z , которые расположены в следующем порядке: $W_{\mu,i}$ находится выше $W_{\mu,i+1}$. Область между $W_{\mu,i}$ и $W_{\mu,i+1}$ обозначим S_i^μ , область между Δ_u и $W_{\mu,1}$ обозначим S_0^μ , область между Δ_l и $W_{\mu,s}$ обозначим S_s^μ .

Теорема 1. Пусть множество W_μ в области D состоит из s замкнутых кривых $W_{\mu,1}, W_{\mu,2}, \dots, W_{\mu,s}$. Если у системы (1) нет точек покоя в области D , то она имеет по крайней мере s , но не более $s+2$ предельных циклов второго рода в области D , а именно: области S_i^μ , $i = 1, \dots, s-1$, содержат по единственному предельному циклу второго рода, каждая из областей S_0^μ и S_s^μ также может содержать по одному предельному циклу второго рода.

Предельный цикл в S_i^μ является простым и асимптотически устойчивым (не устойчивым), если в этой области имеет место неравенство $k\Phi(\varphi, y, \mu, k)\Psi(\varphi, y, \mu) < 0$ (> 0).

Такой подход был эффективно применен для исследования предельных циклов уравнения Абеля, включающего бифуркационные значения параметра [3].

В докладе будут представлены результаты оценки числа предельных циклов для структурно неустойчивой системы (1), в которой

$$h_2(\varphi, \mu) = 3h_3(\varphi, \mu)(a + b \cos \varphi + c \sin \varphi),$$

$$h_1(\varphi, \mu) = 3h_3((b^2 - c^2) \cos^2 \varphi + 2a(b \cos \varphi - c \sin \varphi) + cb \sin 2\varphi + c^2 + a^2 - \frac{1}{2}\mu) - \frac{3}{2}(c \cos \varphi - b \sin \varphi),$$

$$h_0(\varphi, \mu) = \frac{1}{2}(a + b \cos \varphi + c \sin \varphi)(-c \cos \varphi + b \sin \varphi + (2(a + b \cos \varphi + c \sin \varphi)^2 - 3\mu)h_3(\varphi, \mu)), \quad (2)$$

а параметр μ может принимать бифуркационные значения, a, b, c — произвольные действительные параметры.

Теорема 2. Функция

$$\Psi = (a + b \cos \varphi + c \sin \varphi + y)^2 - \mu$$

является функцией Дюлака — Черкаса для системы (1) на цилиндре Z при всех $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$, если выполняется условие

$$\Phi(\varphi, y, \mu, k) \equiv \Phi_0(\varphi, \mu) = -\mu(c \cos \varphi - b \sin \varphi + h_3(\varphi, \mu)) > 0 \quad (< 0). \quad (3)$$

Следствие 1. Если справедливо условие (3), то система (1) в случае (2) имеет не более одного предельного цикла второго рода при $\mu < 0$ и имеет не более трех предельных цикла второго рода при $\mu > 0$.

Точное число предельных циклов зависит от существования точек покоя системы (1) в области D , количество и расположение которых на оси $O\varphi$ определяется из уравнения $h_0(\varphi, \mu) = 0$. Это уравнение при соответствующем выборе значений коэффициентов a , b , c и функции $h_3(\varphi, \mu)$ может иметь до 6 различных действительных корней или не иметь их вообще. В частности, доказан следующий результат.

Теорема 3. Если существуют действительные числа A и C , при которых справедливы следующие условия:

$$b = c = \mu C, \quad a = c^2 \mu^2 + A^2, \quad C > 1, \quad A \gg C, \quad h_3(\varphi, \nu) > 2C^2 + 1, \quad (4)$$

то система (1) в случае (2) не имеет точек покоя.

Таким образом, получена следующая оценка числа предельных циклов.

Теорема 4 Система (1) при выполнении условий (2) – (4) имеет единственный предельный цикл второго рода LC при $\mu < 0$, который является устойчивым (неустойчивым) в случае $h_3(\varphi, \mu) < 0$ (> 0) и имеет точно три простых предельных цикла второго рода LC_1 , LC_2 , LC_3 при $\mu > 0$. Предельные циклы LC_1 и LC_3 являются устойчивыми (неустойчивыми), а цикл LC_2 является неустойчивым (устойчивым) в случае $h_3(\varphi, \mu) > 0$ (< 0).

Литература

1. Черкас Л. А., Гринь А. А. Функция предельных циклов второго рода для автономных систем на цилиндре // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 4. С. 462–470.
2. Cherkas L. A., Grin A. A., Schneider K. R. A new approach to study limit cycles on a cylinder, Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems // Series A: Mathematical Analysis. 2011. V. 18. P. 839–851.
3. Гринь А. А., Рудевич С. В. Оценка числа предельных циклов для одного уравнения Абеля // Весн. Гродненського держав. ун-та. Сер. 2. Математика. 2015. № 2(192). С. 28–35.

О СТЕПЕНИ НЕПРЕРЫВНОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И.Н. Грод

Тернопольский национальный педагогический университет, Тернополь, Украина

grod@tnpu.edu.ua

Исследованию инвариантных тороидальных многообразий динамических систем посвящено большое количество работ, в частности [1–3]. Введенное в работе [2] понятие функции Грина задачи об инвариантном торе позволило с единой точки зрения изложить теорию возмущения как дифференцируемых, так и непрерывных инвариантных многообразий и привело к необходимости изучения свойств гладкости этих функций. Изучению этого вопроса также посвящена и настоящая работа.

В теории нелинейных многочастотных колебаний возникают системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi) \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$ — m -мерный тор, $a(\varphi)$, $A(\varphi)$, $f(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, $C^0(\mathcal{T}_m)$ — пространство непрерывных по совокупности переменных φ - и 2π -периодических по каждой переменной φ_j , $j = \overline{1, m}$.